Интерполирование функций

Постановка задачи интерполирования

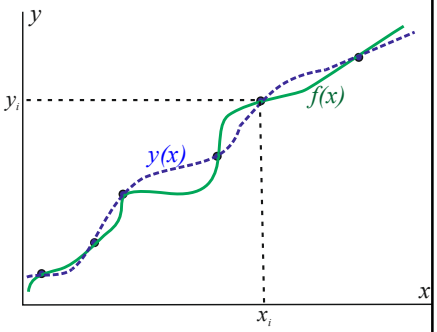
на отрезке [a,b] заданы точки x_i,
(i = 0,...N, $x_0 = a$, $x_N = b$),
и значения функции $y(x_0)=y_0, \ldots, y(x_N)=y_N$.

Требуется построить функцию $f(x)$, чтобы:

$f(x_i) = y_i$ - условия Лагранжа **(1)**

x_i - узлы интерполяции,
$f(x)$ – интерполирующая функция

между узлами интерполяции функции $y(x)$ и $f(x)$, вообще говоря, **не совпадают**



различают задачу собственно *интерполирования* - восстановления зависимости *внутри* отрезка [a,b]),
и *экстраполирования* - восстановления зависимости *за пределами* отрезка [a,b].

Полученную интерполирующую функцию $f(x)$ используют для *приближения* значения функции $y(x)$, в точках, отличных от x_i. С помощью интерполяции решают задачи **дифференцирования** и **интегрирования** функций, нахождение **нулей** и **экстремумов** функций, решение **дифференциальных уравнений** и т.д., а также графического представления зависимости

Задача в такой постановке может иметь *бесконечно много* решений, или *не иметь* их совсем.
Решение задачи становится **однозначным**, если искать $f(x)$ в виде *известной* функции

2

Интерполяция каноническим полиномом

Часто ищут $f(x)$ в виде полинома степени не выше N (*полиномиальная* интерполяция)

Запишем полином $P_N(x)$ в *каноническом* виде

$$P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_jx^j + \ldots + a_Nx^N = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j \qquad \textbf{(2)}$$

где $a_0 \ldots a_N$ - параметры интерполяции.

условия Лагранжа (1) для каждого узла:

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_jx_i^j + \ldots + a_Nx_i^N = y_i, \qquad i = 0,\ldots N$$

или

$$\begin{cases} a_0 & +a_1x_0 & +a_2x_0^2 & +\ldots. & +a_Nx_0^N & = y_0 \\ a_0 & +a_1x_1 & +a_2x_1^2 & +\ldots. & +a_Nx_1^N & = y_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_0 & +a_1x_i & +a_2x_i^2 & +\ldots. & +a_Nx_i^N & = y_i \\ . & . & . & . & . & . \\ a_0 & +a_1x_N & +a_2x_N^2 & +\ldots. & +a_Nx_N^N & = y_N \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

СЛАУ, где неизвестные - параметры $a_0 \ldots a_N$

Решение данной системы можно проводить любым методом решения СЛАУ.

В результате получим набор коэффициентов $a_0 \ldots a_N$ интерполирующего полинома (2), который позволит вычислить его значение в любой точке отрезка интерполяции

Другие способы построения интерполирующего полинома: полиномы *Лагранжа, Ньютона*

3

Недостатки полиномиальной интерполяции:

- Если количество узлов N велико, то приходится использовать полиномы высокой степени, что создаёт определённые сложности при счёте (**слишком большие или слишком маленькие коэффициенты** в системе (3)), и не всегда приводит к удовлетворительным результатам.
- Несмотря на выполнение условий Лагранжа в узлах, интерполирующая функция может иметь значительное отклонение от аппроксимируемой кривой **между** узлами, т.к. полином N-го порядка имеет в общем случае N корней, т.е. N-1 «изгибов».
- Большая **погрешность** возникает **на концах** отрезков интерполирования.
- При этом повышение степени интерполирующего полинома приводит не к уменьшению, а к **увеличению** погрешности.

4

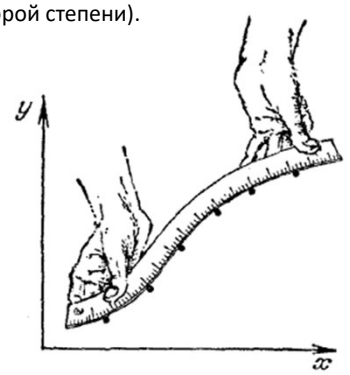
Сплайн-интерполяция

Понятие о сплайне

Для преодоления трудностей полиномиальной интерполяции:
- отрезок интерполяции разбивают на части, и на каждой из них строят *свой* интерполяционный полином.
- в точках "сшивки" полиномов ставятся дополнительные условия, чтобы получившаяся *кусочная* функция и ее *производная* были *непрерывными и гладкими*.

Строится ***сплайн - функция***, которая на каждом частичном отрезке интерполирования является ***алгебраическим многочленом***, а на всём заданном отрезку *непрерывна* вместе с несколькими своими производными (обычно - до второй степени).

Чаще всего применяются *кубические сплайны*.
Физически интерполяция кубическим сплайном соответствует проведению интерполирующей кривой по *упруго изогнутой* линейке-лекалу



Упругий изгиб описывается ОДУ 4-ой степени^

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} = 0$$

простейшим решением которого как раз является *многочлен 3-й* степени:

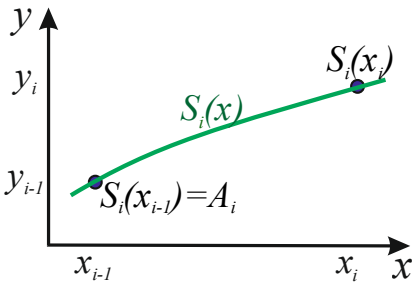
$$\varphi(x) = P_N(x)$$

Построение сплайна

Кубический сплайн на каждом i-ом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ между соседними узлами ищем в виде:

$$S_i(x) = A_i + B_i(x - x_{i-1}) + C_i(x - x_{i-1})^2 + D_i(x - x_{i-1})^3, \quad \textbf{(4)}$$

где $i = 1,\ldots,N$,
A_i, B_i, C_i, D_i –
неизвестные коэффициенты ($4N$ штук).



Они могут быть определены из **условий в узлах**:

1) условия Лагранжа (1) в узлах x_{i-1} и x_i,

$$y_{i-1} = y(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) = A_i, \quad \textbf{(5)}$$

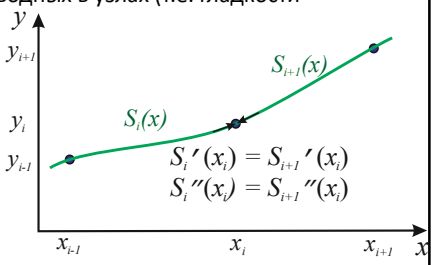
$$y_i = y(x_i) = S_i(x_i) = A_i + B_i h_i + C_i h_i^2 + D_i h_i^3, \quad \textbf{(6)}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ - длина i-го отрезка, $i = 1,\ldots,N$.

Количество этих уравнений $2N$, поэтому для определенности нужны дополнительные условия, которые получим из…

6

2) требования *непрерывности 1-ой и 2-ой* производных в узлах (т.е. гладкости функции и ее 1-ой производной).



Производные имеют вид:

$S_i'(x) = B_i + 2C_i(x - x_{i-1}) + 3D_i(x - x_{i-1})^2,$

$S_i''(x) = 2C_i + 6D_i(x - x_{i-1}),$

$x_{i-1} < x < x_i.$

В каждом узле x_i существует **2 значения** производных:

"слева": **"справа":**

$S_i'(x_i) = B_i + 2C_ih_i + 3D_ih_i^2$ $S_{i+1}'(x_i) = B_{i+1}$

$S_i''(x_i) = 2C_i + 6D_ih_i$ $S_{i+1}''(x_i) = 2C_{i+1}.$

непрерывность означает, что во внутреннем узле x_i "левые" и "правые" значения производных равны:

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i); \quad S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$$

Приравнивая, имеем:

$B_{i+1} = B_i + 2C_ih_i + 3D_ih_i^2$ **(7)**

$C_{i+1} = C_i + 3D_ih_i.$ **(8)**

где $i = 1,\ldots,N\text{-}1,$ что дает еще $2(N\text{-}1)$ условий.

7

Недостает **еще двух** условий, которые обычно получают из:

3) естественного предположения о равенства 0 кривизны (т.е. второй производной) на концах отрезка интерполирования:

$S_1''(x_0) = 2C_1 + 6D_1(x_0 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0,$

$S_N''(x_N) = 2C_N + 6D_N(x_N - x_{N-1}) = 0 \quad \Rightarrow C_N + 3D_Nh_N = 0$ **(9)**

Уравнения (5)-(9) образуют СЛАУ, решение которой даёт параметры искомых многочленов A_i, B_i, C_i, D_i.

Для удобства решения выразим B_i и D_i через C_i

Уравнение (5) сразу дает все коэффициенты $A_i = y(x_{i-1})$

Из уравнений (8) и (9) следует:

$D_i = (C_{i+1} - C_i)/3h_i, \quad D_N = -C_N/3h_N \quad i = 1,\ldots,N\text{-}1$ **(10)**

Подставив (10) в (6) и одновременно, исключая оттуда $A_i = y(x_{i-1})$, получим

$B_i = ((y_i - y_{i-1})/h_i) - h_i(C_{i+1} + 2C_i)/3, \; i = 1,\ldots,N\text{-}1,$

$B_N = ((y_N - y_{N-1})/h_N) - 2/3h_NC_N.$ **(11)**

8

Исключим из (7) величины B_i и B_{i+1} при помощи (11), увеличив соответственно во втором случае индекс на 1, а величину D_i – на основании (10).

Получаем СЛАУ относительно коэффициентов C_i:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ h_{i-1}C_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)C_i + h_iC_{i+1} = 3\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), i = 2,\dots,N \\ C_{N+1} = 0 \end{cases} \quad \textbf{(12)}$$

В каждое уравнение системы входит только 3 неизвестных C_{i-1}, C_i, C_{i+1}.
Матрица СЛАУ является трехдиагональной, решение ее проводим *методом прогонки*.

9

Алгоритм

1. по x_i, $i=0,\dots,N$ находим h_i, $i=1,\dots,N$.
2. формируем матрицу системы согласно (12):

главная диагональ = $\begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2(h_{i-1} + h_i), & i = 2,\dots,N \end{cases}$

вектор правой части = $\begin{cases} 0, & i = 1 \\ 3\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), & i = 2,\dots,N \end{cases}$

нижняя диагональ = $\begin{cases} 0, & i = 1 \\ h_{i-1}, & i = 2,\dots,N \end{cases}$

верхняя диагональ = $\begin{cases} 0, & i = 1 \\ h_i, & i = 2,\dots,N-1 \\ 0, & i = N \end{cases}$

3. Решаем систему относительно C_i методом прогонки *(i=1,…,N)*.
4. по формулам (5), (10), (11) находим A_i, B_i, D_i *(i=1,…,N)*.

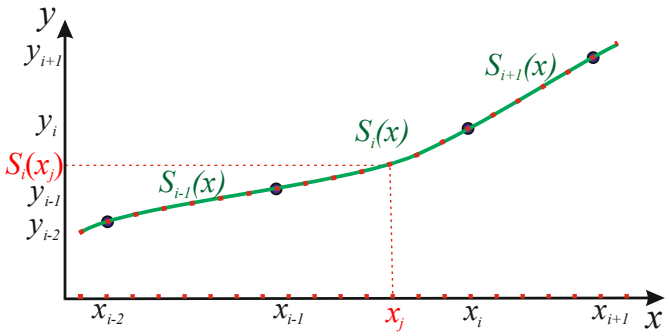
10

5. вычисление сплайна в промежуточных точках:

- задаем набор точек $x_j \in [a,b]$, $j = 0,\ldots,M$ $(M>>N)$, несовпадающий с x_i,
- для каждой точки x_j определяем номер отрезка $i=1,..,N$, к которому она принадлежит

$$x_{i-1} < x_j < x_i;$$

- зная коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i вычисляем значение кубического сплайна $S_i(x_j)$ по (16),
- рисуем его.



11